

Interrogation de contrôle continu
Algèbre, Analyse, Langage C

L1 MASS, 01/08

Vous devez rendre une copie pour chacune des trois matières. La note obtenue pour chaque matière sera intégrée à la note de contrôle continu de la matière selon un calcul décidé par l'enseignant responsable.

Partie Analyse S1.

Vous devez traiter trois exercices au choix parmi les suivants. Si plus de trois exercices étaient traités, les trois meilleurs seraient retenus. L'ordre des exercices est aléatoire.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 2.$$

Ainsi, $u_1 = -1$, $u_2 = e^{-1} - 2, \dots$ Par définition de la suite, on a pour tout entier n , $u_n > -2$.

1. sur 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n et u_{n-1} . En déduire par une récurrence (précise mais concise) que $(u_n)_n$ est décroissante.

2. sur 3. Que peut-on en déduire quant à la convergence de $(u_n)_n$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Les deux questions sont indépendantes.

1. sur 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire la négation de :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell \in \mathbb{R}_*, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + \ell], \forall t \in \mathbb{R}, |f(t + \tau) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

(Aucune justification n'est demandée).

2. sur 4. On considère les assertions suivantes :

$$(P) \quad \exists x \geq 1, \quad \forall y \geq 1, \quad xy \geq 2.$$

$$(Q) \quad \forall y \geq 1, \quad \exists x \geq 1, \quad xy \geq 2.$$

Etudier si les quatre assertions (P) , (Q) , $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies ou fausses (on justifiera rapidement).

Exercice 3. Les deux questions sont indépendantes.

1. sur 3. Donnez la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. sur 4. Montrer en revenant à la définition de la limite que la suite $\left(\frac{n-1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est convergente de limite nulle.

Exercice 4. Les deux questions sont indépendantes. Soit A et B deux ensembles.

1. sur 3. Rappelez la formule vue en cours pour ${}^c(A \cup B)$ (on ne demande pas de la démontrer).

2. sur 4. Montrez que $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

Exercice 5. Les deux questions sont indépendantes.

1. sur 3. Soit X et Y deux ensembles, A une partie de X et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Donner la définition de $f(A)$.

2. sur 4. On considère ici le cas $X = \mathbb{R}^*$ et $Y = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto 1/x$. Déterminez par le calcul $f^{-1}([-1, 2])$ et représentez la situation sur un dessin.

Partie Langage C

Exercice 1.

1. Tracer le programme ci-dessous (ne pas le recopier). Quel message s'affiche à la fin de l'exécution ?

2. Ce programme donne la valeur d'une suite (u_n) définie par une double récurrence pour $n = 4$. Donner une définition mathématique de cette suite.

```
#include<stdio.h>

main(){
    int p, s, i, t, n;

    n=4;

    p=0; // Valeur de u1
    s=0; // Valeur de u2

    for(i=3; i<=n; i++){
        t = s;
        s = 2*p+s+1;
        p = t;
        // Point d'observation 1
    }

    printf("La valeur de u%i est : %i\n", i-1, s);
}
```

Exercice 2.

Écrire un programme en langage C qui demande à l'utilisateur un nombre n , et qui affiche en retour " n est premier" ou " n n'est pas premier" selon que n est premier ou non.

Rappel : un nombre entier $n \geq 2$ est premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.